Problème1

1. Détermination par équivalence des aires

   La position η de l'axe principal est déterminée par le rapport entre le moment d'une aire plane et la surface de cette dernière.

$$S_{x'} = F_1\eta_1 - F_2\eta_2 = 16 \times 2 - 4 \times (1.4 + 1)$$

$$\eta = \frac{S_{x'}}{F} = \frac{F_1\eta_1 - F_2\eta_2}{F_1 - F_2} = \frac{32-9{,}6}{16-4} = 1.867\ cm$$

   Les moments d'inertie principaux I_x et I_y sont déterminés par les moments d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité auquel on ajoute l'air de la section multipliée par le carré de la distance à l'axe neutre :

$$I_x = \frac{b_1 h_1^3}{12} + F_1(\eta_1 - \eta)^2 - \frac{b_2 h_2^3}{12} - F_2(\eta_2 - \eta)^2$$

$$= 21{,}33 + 0{,}28 - 1{,}33 - 1{,}14 = 19.14\ cm^4$$

$$I_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{1}{12}(4^4 - 2^4) = 20\ cm^4$$

2. Calcul par intégration

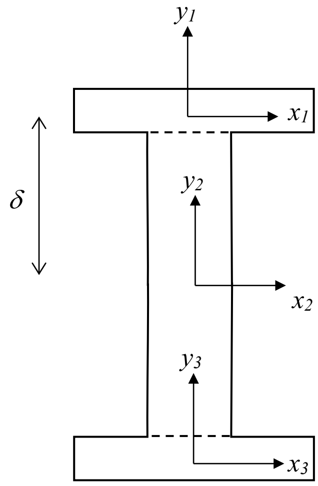
$$I_x = \iint_F y^2\, dF$$

$$= \int_{y=-\eta}^{4-\eta} \int_{x=-2}^{2} y^2\, dxdy - \int_{y=1.4-\eta}^{2-\eta+1.4} \int_{x=-1}^{1} y^2\, dxdy = 21.61 - 2.47 = 19.14$$

$$I_y = \iint_F x^2\, dF = \int_{y=-\eta}^{4-\eta} \int_{x=-2}^{2} x^2\, dxdy - \int_{y=1.4-\eta}^{2-\eta+1.4} \int_{x=-1}^{1} x^2\, dxdy = 21.\overline{3} - 1.\overline{3} = 20$$

Problème 2

1. Schéma : diviser la section en 3 parties



2. Partie 1 et 3

$$F_1 = 1 \times 6 = 6 \qquad \text{et} \qquad \delta = 4.5$$

$$I_{x2} = I_{x1} + F_1\delta^2 = \frac{1^3 \times 6}{12} + 6 \times 4.5^2 = 122$$

$$I_{y2} = I_{y1} = \frac{6^3 \times 1}{12} = 18$$

3. Partie 2

$$F_2 = 2 \times 8 = 16$$

$$I_{x2} = \frac{8^3 \times 2}{12} = 85.33$$

$$I_{y2} = \frac{2^3 \times 8}{12} = 5.33$$

4. Moment d'inertie total

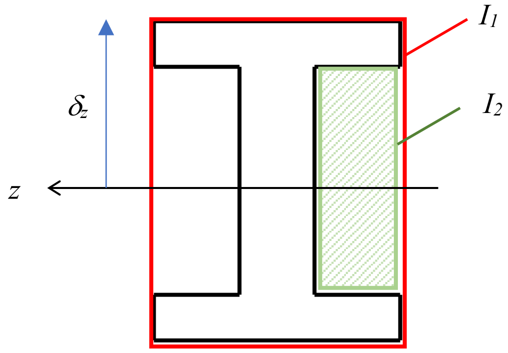
$$I_x = 2 \times \ 122 + 85.33 = 329.33$$

$$I_y = 2 \times 18 + 5.33 = 41.33$$

$$I_p = I_x + I_y = 370.66$$

Problème3

1. Schéma



$$I_z = \iint y^2 dF$$

$$I_z(rectangle) = \frac{b\,h^3}{12}$$

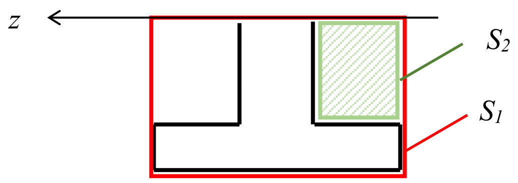
2. Moments d'inertie

$$I_z = I_1 - 2I_2 = \frac{\beta t(2t+\alpha t)^3}{12} - \frac{2}{12}\frac{\beta t - t}{2}(\alpha t)^3$$
$$= \frac{t^4}{12}[(\alpha+2)^3\beta - \alpha^3(\beta-1)] = t^4 K$$

3. Moments de résistance

$$W_z = \frac{I_z}{\delta_z} = \frac{I_z}{\frac{\alpha t}{2}+t} = \frac{t^3 K}{1+\frac{\alpha}{2}}$$

4. Moment statique

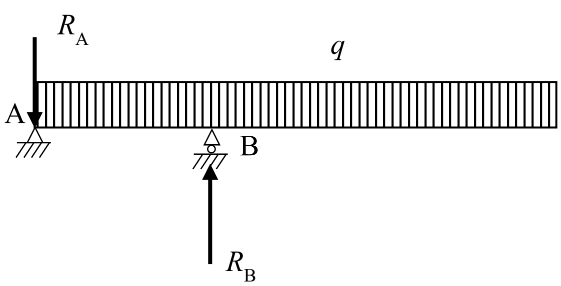


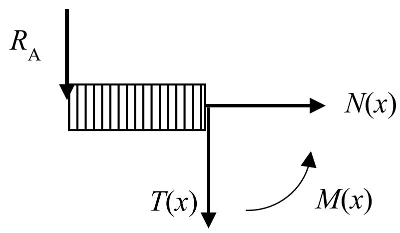
$$S_z = \iint y\,dF$$

$$S_z(rectangle) = \frac{b\,h^2}{2}$$

$$S_z = S_1 - SI_2 = \frac{\beta t(t+\alpha t/2)^2}{2} - \frac{\beta t - t}{2}(\alpha t/2)^2$$
$$= \frac{t^3}{8}[(\alpha+2)^2\beta - \alpha^2(\beta-1)]$$

5. Schéma





6. Equilibre des forces et des moments de force

$$\Sigma F = R_A + \; q\, 3\ell \; - R_B = 0$$

$$\Sigma M = R_B\;\ell - \int_0^{3\ell} qx\,dx = R_B\;\ell - \frac{9}{2}q\ell^2$$

D'où l'on peut extraire

$$R_A = \frac{3}{2}q\;\ell$$

$$R_B = \frac{9}{2}q\;\ell$$

7. Diagramme des efforts intérieurs

Entre $0 \le x \le \ell$

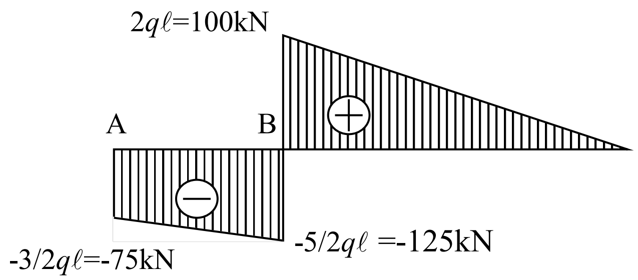
$$T(x) = -R_A - xq = -q\left(\frac{3}{2}\ell + x\right)$$

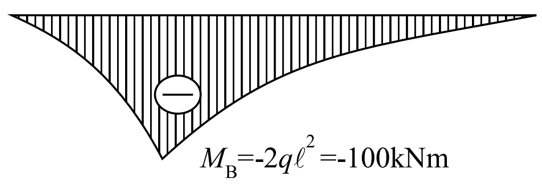
$$M(x) = -R_A x - \frac{qx^2}{2} = -\frac{q}{2}\left(x^2 + 3\ell x\right)$$

Entre $\ell \le x \le 3\;\ell$

$$T(x) = -R_A + R_B - xq = -q(-3\ell + x)$$

$$M(x) = -R_A x - \frac{qx^2}{2} + R_B(x - \ell) = \frac{q}{2}\left(-x^2 + 6\ell x - 9\ell^2\right)$$





8. Moment maximum au point B

$$M_B = 2q\ell^2 = 100 \text{ kNm}$$

L'expression de la contrainte permet de calculer t pour α et β donnés :

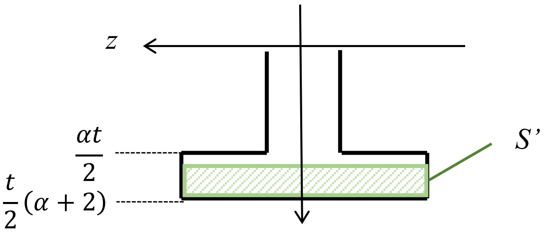
$$\sigma_{max} = \frac{M_B}{W} = 2q\ell^2\,\frac{1+\frac{\alpha}{2}}{t^3 K} \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{M_B}{\sigma K}} = 0.0328$$

9. Cisaillement et représentation

$$\tau = \frac{T_B \cdot S'}{I \cdot b}$$

$$T_B = -\frac{5}{2} q\ell$$

$$I = t^4 K$$



Pour $\frac{\alpha t}{2} \leq y \leq \frac{t}{2}(\alpha + 2)$

$$b = \beta t$$

$$S' = \int_{-\beta t/2}^{\beta t/2} \int_{y}^{\alpha t/2 + t} y\, dx dy = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4}(\alpha + 2)^2 - y^2\right) \beta t$$

$$\tau = \frac{125 \cdot 10^3}{96 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}0328 \cdot 4}\left(\frac{0{,}0328^2 \cdot 49}{4} - y^2\right) 0{,}0328 \cdot 2 = 651(0{,}0132 - y^2)$$

Pour $0 \leq y \leq \frac{\alpha t}{2}$

$$b = t$$

$$S' = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4}(\alpha + 2)^2 - y^2\right) \beta t \; - \frac{1}{2}(\beta - 1)\left(\frac{\alpha^2 t^2}{4} - y^2\right) t$$

$$\tau = \frac{125 \cdot 10^3}{96 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}0328}\left[\left(\frac{0{,}0328^2 \cdot 49}{4} - y^2\right) 0{,}0328 \cdot 2 - 3\left(\frac{25 \cdot 0{,}0328^2}{4} - y^2\right) \frac{0{,}0328}{2}\right]$$

$$= 651(0{,}0326 - y^2) \text{ MPa}$$

La valeur maximale est atteinte en $y = 0$: $\tau_{\max} = 651(0{,}0326) = 21{,}2$ MPa